令和 5 (2023) 年度特別研究

双曲幾何とユークリッド幾何の公式の比較

(指導教員　尾國　新一)

愛媛大学 理学部 理学科 数学・数理情報コース
中村 威晴

目次

1　イントロダクション

双曲幾何における双曲正弦定理, 双曲余弦定理がどのようにユークリッド平面での余弦定理, 正弦定理と対応しているのかを明らかにする.

そのために、双曲幾何の双曲面モデル

$$\mathbf{h}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}$$

の変形により, この曲面から $x_3 = 1$ 平面への近似を考える.

双曲面モデル上の三角形に対して成り立つ 2 つの公式

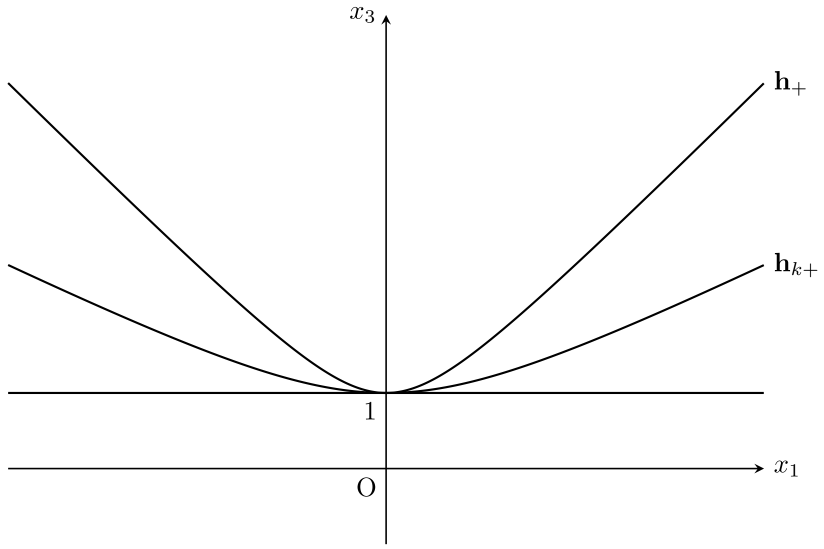
(i) $\cosh l = \cosh m \cosh n - \sinh m \sinh n \cos \alpha$

(ii) $\dfrac{\sinh l}{\sin \alpha} = \dfrac{\sinh m}{\sin \beta} = \dfrac{\sinh n}{\sin \gamma}$

を双曲余弦定理，双曲正弦定理という．$\mathbf{h}_+$ の変形として, $k > 0$, $\mathbf{h}_{k+} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid k^2(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}$ を考える．このとき，$\mathbf{h}_{k+}$ は $k = 1$ のとき $\mathbf{h}_+$ であり，$k \to 0$ のとき $x_3 = 1$ 平面になる．

本まとめではまず，変形双曲面モデル $\mathbf{h}_{k+}$ での幾何学を考察し、特に双曲余弦定理，双曲正弦定理，及びそれらの証明を与える．

さらに，この双曲余弦定理，双曲正弦定理を $k \to 0$ を考えることで，ユークリッド幾何の通常の余弦定理，正弦定理が対応していることを示す．



2　k-ローレンツ内積

$$k > 0,\ \mathbf{h}_{k+} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid k^2(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}$$

について考える.

定義 2.1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し k-ローレンツ内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k$ を以下で定める.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k = k^2(x_1 y_1 + x_2 y_2) - x_3 y_3$$

以降、k-ローレンツ内積を内積とよぶ.

命題 2.2. $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\ \in \mathbb{R}^3$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ として，それらの内積について次の性質が成り立つ.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_k$,
$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k$,
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_k + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_k$.

3　距離と角度

3.1　準備

$A,\ B,\ X, ... \in \mathbb{R}^3$ に対し，これらの点の原点に関する位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{x}$,... で表す.

補題 3.1. $A, B \in \mathbf{h}_{k+}$ のとき

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k \leq -1$$

また　$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k = -1 \Leftrightarrow A = B$

[証明] $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k > -1$ と仮定する. このとき

$$k^2(a_1 b_1 + a_2 b_2) > a_3 b_3 - 1 \quad (a_3, b_3 \geq 1)$$

であるから

$$k^4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 > (a_3 b_3 - 1)^2$$

また

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

よって

$$\begin{aligned}(a_3^2 - 1)(b_3^2 - 1) &= k^4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ &\geq k^4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &> (a_3 b_3 - 1)^2\end{aligned}$$

しかし

$$a_3^2 b_3^2 - a_3^2 - a_3^2 + 1 > a_3^2 b_3^2 - 2a_3 b_3 + 1$$

$$a_3^2 - 2a_3 b_3 + b_3^2 < 0$$

$$(a_3 - b_3)^2 < 0$$

となり矛盾.

したがって、$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k \leq -1$.

また

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k = -1 \Leftrightarrow k^2(a_1b_1 + a_2b_2) = a_3b_3 - 1$$

このとき

$$(a_3 - b_3)^2 \leq 0 \text{ より } a_3 = b_3$$

ゆえに

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 \tag{1}$$

また　$a_1b_2 \neq a_2b_1$ のとき $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) > (a_1b_1 + a_2b_2)^2$ なので

$$a_1b_2 = a_2b_1 \tag{2}$$

(1), (2) より

$$\begin{cases} a_1 = \pm b_1 \\ a_2 = \pm b_2 \end{cases} \quad (\text{複合同順})$$

$a_1 = b_1, a_2 = b_2$ のとき

$$A = B$$

$a_1 = -b_1, a_2 = -b_2$ のとき

$$-1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k = -k^2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2 = -2a_3^2 + 1$$

よって $a_3 = 1$ ゆえに A, B はともに $(0, 0, 1)$ となり，$A = B$ □

補題 3.2. $A \in \mathbf{h}_{k+}$,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_k = -1, \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_k = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_k = 1,$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle_k = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_k = 0$$

ならば

$$-1 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_k \leq 1.$$

[証明]

$$\mathbf{b} = \sqrt{2}\mathbf{a} + \mathbf{u},\ \mathbf{c} = \sqrt{2}\mathbf{a} + \mathbf{v},\ \mathbf{d} = \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{v}$$

とおけば，$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_k = -1, \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle_k = -1, \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle_k = -1.$

また,

$$\langle \mathbf{b}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_k = \langle \sqrt{2}\mathbf{a} + \mathbf{u}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_k$$

$$-b_3 = -\sqrt{2}a_3 + u_3$$

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle_k = 0$ より

$$\begin{aligned}
k^2(a_1u_1 + a_2u_2) - a_3u_3 &= 0 \\
|a_1u_1 + a_2u_2| &= \frac{|a_3u_3|}{k^2} \\
\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} &\geq \frac{|a_3u_3|}{k^2} \\
(u_1^2 + u_2^2)(a_1^2 + a_2^2) &\geq \frac{a_3^2u_3^2}{k^4} \\
\frac{u_3^2 + 1}{k^2} \cdot \frac{a_3^2 - 1}{k^2} &\geq \frac{a_3^2u_3^2}{k^4} \\
(u_3^2 + 1)(a_3^2 - 1) &\geq a_3^2u_3^2 \\
a_3^2 - u_3^2 - 1 &\geq 0 \\
a_3^2 &\geq u_3^2 + 1 \\
a_3^2 &\geq u_3^2 \\
a_3 > 0 \text{ より} \quad a_3 &\geq u_3
\end{aligned}$$

よって，$-\sqrt{2}a_3 + u_3 \leq 0$ なので $b_3 \geq 0$

よって，$B \in \mathbf{h}_{k+}$.

同様に，$C, D \in \mathbf{h}_{k+}$.

したがって，補題 3.1 より

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_k \leq -1,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle_k \leq -1.$$

ところが

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_k = -2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_k,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle_k = -2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_k$$

であるため、$-1 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_k \leq 1$. □

3.2　2 点の距離

定義 3.3. $A, B \in \mathbf{h}_{k+}$, に対し，A と B の $\mathbf{h}_{k+}$ 上での距離 $d_{\mathbf{h}_{k+}}(A, B)$ を、補題 3.1 より，次で定める.

$$\cosh d_{\mathbf{h}_{k+}}(A, B) = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k. \quad (d_{\mathbf{h}_{k+}}(A, B) \geq 0)$$

この距離が距離空間の定義を満たすことはのちに示す.

定理 3.4. $\mathbf{a} \in \mathbf{h}_{k+}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_k = 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_k = 1$, に対して,

$$\mathit{\Gamma}(t) = \mathbf{a} \cosh t + \mathbf{v} \sinh t.$$

とおく. このとき,

・$\mathit{\Gamma}(t) \in \mathbf{h}_{k+}$,

・$-\langle \mathbf{a}, \mathit{\Gamma}(t) \rangle_k = \cosh t$,

・$\mathit{\Gamma}(0) = \mathbf{a}$, $\mathit{\Gamma}'(0) = \mathbf{v}$.

[証明]

$$\begin{aligned}
-\langle \mathbf{a}, \mathit{\Gamma}(t) \rangle_k &= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \cosh t + \mathbf{v} \sinh t \rangle_k \\
&= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_k \cosh t - \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_k \sinh t \\
&= \cosh t.
\end{aligned}$$

$$\mathit{\Gamma}(0) = \mathbf{a} \cosh 0 + \mathbf{v} \sinh 0 = \mathbf{a},$$

$$\mathit{\Gamma}'(t) = \mathbf{a} \sinh t + \mathbf{v} \cosh t$$

より、$\Gamma'(0) = \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(t), \Gamma(t)\rangle_k &= \langle \mathbf{a}\cosh t + \mathbf{v}\sinh t, \mathbf{a}\cosh t + \mathbf{v}\sinh t\rangle_k \\ &= \langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle_k \cosh^2 t + \langle \mathbf{a},\mathbf{v}\rangle_k \cosh t \sinh t + \langle \mathbf{v},\mathbf{a}\rangle_k \sinh t \cosh t + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_k \sinh^2 t \\ &= -\cosh^2 t + \sinh^2 t \\ &= -1\end{aligned}$$

$\Gamma(t)$ は t について連続で，$\Gamma(0) = \mathbf{a}$ の第 3 成分が正より，$\Gamma(t)$ の第 3 成分も正.

よって $\Gamma(t) \in \mathbf{h}_{k+}$.

□

3.3　角度

定義 3.5. $A \in \mathbf{h}_{k+}$ を通る 2 つの測地線

$$\Gamma(t)_1 = \mathbf{a}\cosh t + \mathbf{v}\sinh t.$$

$$\Gamma(t)_2 = \mathbf{a}\cosh t + \mathbf{u}\sinh t.$$

のなす角 $\alpha \in [0,\pi]$ を、補題 3.2 より、次のように定める。

$$\cos\alpha = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_k$$

定理 3.6. 角 ∠BAC の大きさ α に対し，次の式が成り立つ.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{b},\mathbf{c}\rangle_k + \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k \langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k^2 - 1}\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k^2 - 1}}.$$

[証明] 測地線 AB の点 A における接ベクトルを $\mathbf{u}$ とし，A, B の距離 $d_{h_{k+}}(A,B) = m$ とおくと

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}\cosh m + \mathbf{u}\sinh m$$

$\cosh m = -\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k$ であるから

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}\cosh m}{\sinh m} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k^2 - 1}}$$

同様に、測地線 AC の点 A における接ベクトルを $\mathbf{v}$ とすると

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k^2 - 1}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_k \\ &= \langle \frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k^2 - 1}}, \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k^2 - 1}}\rangle_k \\ &= \frac{\langle \mathbf{b},\mathbf{c}\rangle_k + \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k \langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_k^2 - 1}\sqrt{\langle \mathbf{a},\mathbf{c}\rangle_k^2 - 1.}}\end{aligned}$$

□

4　双曲三角形の公式

定理 4.1. $\mathbf{h}_{k+}$ 上の三角形 $\triangle ABC$ に対し，次の公式が成り立つ.

(i) $\cosh l = \cosh m \cosh n - \sinh m \sinh n \cos\alpha$

(ii) $\dfrac{\sinh l}{\sin\alpha} = \dfrac{\sinh m}{\sin\beta} = \dfrac{\sinh n}{\sin\gamma}$

(iii) $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh l$

[証明]

$$\cosh l = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle_k,\ \cosh m = -\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle_k,\ \cosh n = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_k.$$

であるから，定理 3.6 より

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle_k + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_k\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle_k}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_k^2 - 1}\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle_k^2 - 1}} \\ &= \frac{-\cosh l + \cosh m\cosh n}{\sqrt{\cosh^2 m - 1}\sqrt{\cosh^2 n - 1}} \\ &= \frac{-\cosh l + \cosh m\cosh n}{\sinh m\sinh n}\end{aligned}$$

よって

$$\cosh l = \cosh m\cosh n - \sinh m\sinh n\cos\alpha.$$

が成り立つ.

$\lambda = \cosh l$, $\mu = \cosh m$, $\nu = \cosh n$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\mu\nu - \lambda}{\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{\nu^2 - 1}}. \\ \sin\alpha &= \sqrt{1 - \frac{(\mu\nu - \lambda)^2}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1).}}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\sin\gamma}.$$

つまり

$$\frac{\sinh l}{\sin\alpha} = \frac{\sinh m}{\sin\beta} = \frac{\sinh n}{\sin\gamma}.$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha &= \frac{\nu\lambda - \mu}{\sqrt{\nu^2 - 1}\sqrt{\lambda^2 - 1}}\frac{\lambda\mu - \nu}{\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{\mu^2 - 1}} + \frac{\mu\nu - \lambda}{\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{\nu^2 - 1}} \\ &= \frac{\lambda(1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}{(\lambda^2 - 1)\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{\nu^2 - 1}} \\ &= \lambda\sin\beta\sin\gamma \\ &= \cosh l\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

よって

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh l.$$

□

5　距離空間の証明

定義 3.2 の $\mathbf{h}_{k+}$ 上の距離

$$d_{h_{k+}} : \cosh d_{h_{k+}}(A, B) = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_k,\ \ d_{h_{k+}}(A, B) \geq 0$$

が距離の定義を満たすことを証明する.

(i) $d_{h_{k+}}(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
(ii) $d_{h_{k+}}(A,B) = d_{h_{k+}}(B,A)$
(iii) $d_{h_{k+}}(A,B) \leq d_{h_{k+}}(A,C) + d_{h_{k+}}(C,B)$

[証明]　(i)

$$\begin{aligned} & d_{h_{k+}}(A,B) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cosh d_{h_{k+}}(A,B) = \cosh 0 = 1 \\ \Leftrightarrow & -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k = 1 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{a} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \cosh d_{h_{k+}}(A,B) &= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_k \\ &= -\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle_k \\ &= \cosh d_{h_{k+}}(B,A) \end{aligned} \tag{3}$$

$d_{h_{k+}}(A,B) \geq 0$ より

$$d_{h_{k+}}(A,B) = d_{h_{k+}}(B,A)$$

(iii) 双曲線関数の加法定理より

$$\cosh(d_{h_{k+}}(A,C) + d_{h_{k+}}(C,B)) = \cosh d_{h_{k+}}(A,C) \cosh d_{h_{k+}}(C,B) + \sinh d_{h_{k+}}(A,C) \sinh d_{h_{k+}}(C,B)$$

双曲余弦定理より

$$\cosh d_{h_{k+}}(A,B) = \cosh d_{h_{k+}}(A,C) \cosh d_{h_{k+}}(C,B) - \sinh d_{h_{k+}}(A,C) \sinh d_{h_{k+}}(C,B) \cos\gamma$$

これと，$\cos\gamma \geq -1$ より

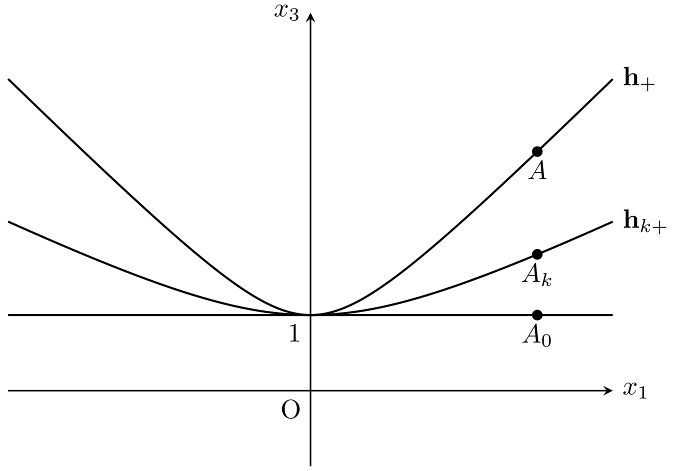
$$\cosh(d_{h_{k+}}(A,C) + d_{h_{k+}}(C,B)) \geq \cosh d_{h_{k+}}(A,B)$$

$\cosh x$ は $x \geq 0$ で単調増加なので

$$d_{h_{k+}}(A,C) + d_{h_{k+}}(C,B) \geq d_{h_{k+}}(A,B)$$

□

6　h_{k+} からユークリッド平面への近似



h_+ 上に点 $A\,(a_1, a_2, a_3)$ をとり，A から x_1x_2- 平面に直交する方向への射影を考える．

6 h_{k+} からユークリッド平面への近似

A に対応する h_{k+} 上の点 $A_k\,(a(k)_1, a(k)_2, a(k)_3)$, 平面 $x_3 = 1$ 上の点 $A_0\,(a(0)_1, a(0)_2, a(0)_3)$ について

$$a(k)_1 = a_1, \quad a(k)_2 = a_2.$$

$k^2(a(k)_1^2 + a(k)_2^2) - a(k)_3^2 = -1$ より

$$a(k)_3 = \sqrt{1 + k^2(a_3^2 - 1)}.$$

よって

$$A_k : (a_1, a_2, \sqrt{1 + k^2(a_3^2 - 1)}).$$

また

$$A_0 : (a_1, a_2, 1).$$

h_{k+} 上の 2 点 B_k, C_k の距離を l_k とすると

$$\begin{aligned}
\cosh l_k &= -\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k \rangle_k \\
&= -k^2(b(k)_1 c(k)_1 + b(k)_2 c(k)_2) + b(k)_3 c(k)_3 \\
&= -k^2(b_1 c_1 + b_2 c_2) + \sqrt{1 + k^2(b_3^2 - 1)}\sqrt{1 + k^2(c_3^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

$$f(k) = -k^2(b_1 c_1 + b_2 c_2) + \sqrt{1 + k^2(b_3^2 - 1)}\sqrt{1 + k^2(c_3^2 - 1)}.$$

とおく

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = b_3^2 + c_3^2 - 2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + 1), \cdots$$

より，$f(k)$ を $k = 0$ の周りでテイラー展開すると.

$$f(k) = 1 + 0 + \frac{k^2}{2}(b_3^2 + c_3^2 - 2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + 1)) + \cdots.$$

ここで，$x_3 = 1$ 平面上の 2 点 B_0, C_0 の距離 l_0 について，三平方の定理より

$$\begin{aligned}
l_0 &= \sqrt{(b(0)_1 - c(0)_1)^2 + (b(0)_2 - c(0)_2)^2} \\
&= \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} \\
&= \sqrt{b_3^2 + c_3^2 - 2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + 1)}
\end{aligned}$$

よって

$$\cosh l_k = f(k) \fallingdotseq 1 + \frac{k^2}{2} l_0^2.$$

と，k に関して 2 次近似ができる.

同様に

$$\sinh l_k \fallingdotseq k l_0.$$

$\cosh l_k \fallingdotseq 1 + \frac{k^2}{2} l_0^2$, $\sinh l_k \fallingdotseq k l_0$ などを双曲余弦定理に代入して 2 次近似を求めると,

$$\begin{aligned}
\cosh l_k &= \cosh m_k \cosh n_k - \sinh m_k \sinh n_k \cos \alpha_k \\
1 + \frac{k^2}{2} l_0^2 &\fallingdotseq (1 + \frac{k^2}{2} m_0^2)(1 + \frac{k^2}{2} n_0^2) - k m_0 k n_0 \cos \alpha_0 \\
1 + \frac{k^2}{2} l_0^2 &\fallingdotseq 1 + \frac{k^2}{2} m_0^2 + \frac{k^2}{2} n_0^2 + \frac{k^4}{4} m_0^2 n_0^2 - k^2 m_0 n_0 \cos \alpha_0.
\end{aligned}$$

2 次近似なので，k^4 の項は無視することができ,

$$1 + \frac{k^2}{2} l_0^2 \fallingdotseq 1 + \frac{k^2}{2} m_0^2 + \frac{k^2}{2} n_0^2 - k^2 m_0^2 n_0^2 \cos \alpha_0.$$

となり，ユークリッドの余弦定理 $l_0^2 = m_0^2 + n_0^2 - 2 m_0 n_0 \cos \alpha_0$ と対応していることが分かる.

双曲正弦定理に代入して 2 次近似を求めると，

$$\frac{\sinh l_k}{\sin \alpha_k} = \frac{\sinh m_k}{\sin \beta_k} \frac{\sinh n_k}{\sin \gamma_k}$$
$$\frac{kl_0}{\sin \alpha_0} \fallingdotseq \frac{km_0}{\sin \beta_0} \fallingdotseq \frac{kn_0}{\sin \gamma_0}.$$

となり，ユークリッドの正弦定理 $\dfrac{l_0}{\sin \alpha_0} = \dfrac{m_0}{\sin \beta_0} = \dfrac{n_0}{\sin \gamma_0}$ と対応していることが分かる．

参考文献

[1] 河野俊丈, 曲面の幾何構造とモジュライ［増補版］（2023）
[2] 中岡稔, 双曲幾何学入門：線形代数の応用（1993）