

微分方程式の研究

～予防接種の効果～

兵頭 諒祐

研究目的

本研究では、集団に感染症が広まる様子を表す連立微分方程式を導き、予防接種を行うときと、行わないときでの感染者数の最大値を比較し、予防接種の効果を調べる。

感染症の仮定

- 問題とする病気からすっかり治癒した者には、一生その病気にかからない免疫が作られること
- 潜伏期間は無視できるほど短いこと

集団内の人々の分類

人々の3つのクラス

I：感染者のクラス

S：病気にかかりうる人達のクラス

R：除外者のクラス

感染症の伝染の規則

- 規則1

人口はある固定レベル N に保たれる。

- 規則2

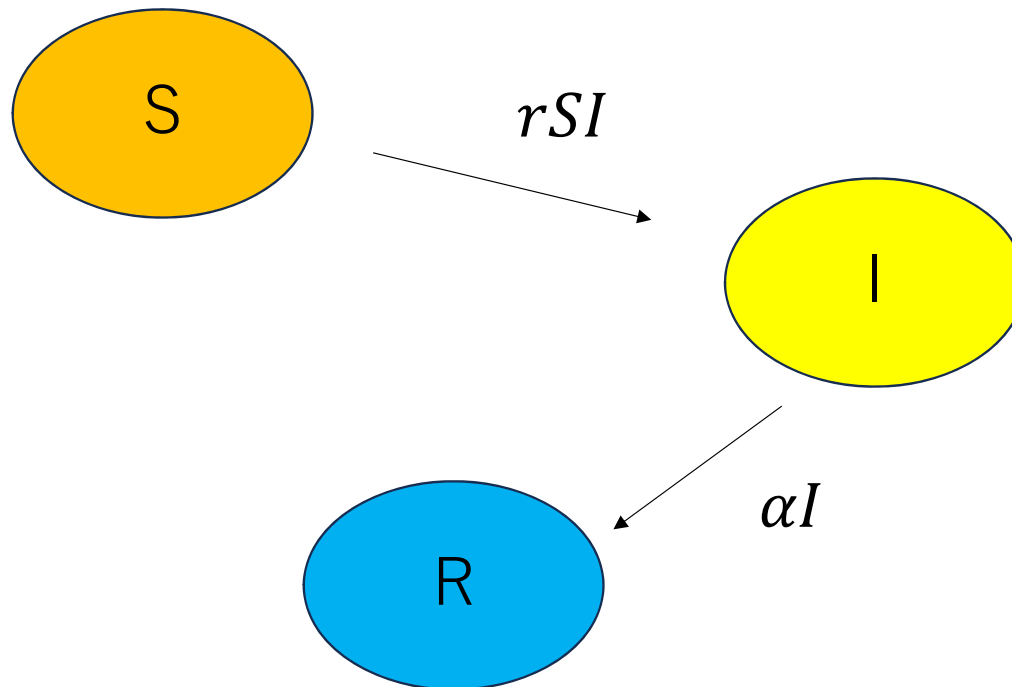
病気にかかりうる人達の人口の変化率は、 (S) の人数と (I) の人数の積に比例する。

- 規則3

(I) からは、 (I) の大きさに比例する率で人数が減る。

感染症の伝染の規則

規則1-3を図式で表すと、以下のようになる。



感染症の伝染の規則

- 規則 1 – 3 より、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -rSI \\ \frac{dI}{dt} = rSI - \alpha I \\ \left(\frac{dR}{dt} = \alpha I \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

($r, \alpha > 0$, r は感染率、 α は除外率)

($t = 0$ のとき、 $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ とする。)

($\rho = \frac{\alpha}{r} > 0$ とし、 S_0 は $S_0 > \rho$ を満たす。)

(1)の軌道

(1)の軌道は、1階微分方程式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{rSI - \alpha I}{-rSI} = -1 + \frac{\alpha}{rS}$$

の解曲線である。

この微分方程式の両辺を積分して、

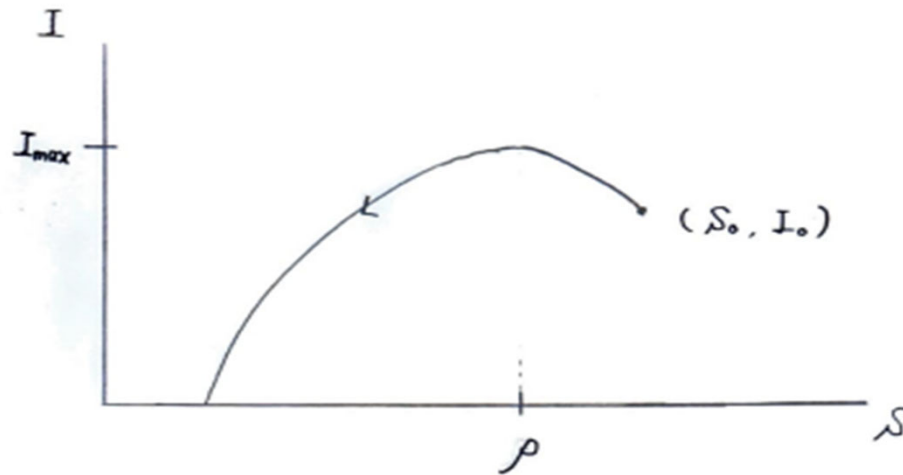
$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} \quad (2)$$

(2)の最大値

予防接種を行わない場合の $I(S)$ の最大値は、 $S = \rho$ のとき、

$$I_{max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} \quad (3)$$

(1)の軌道は、 $0 \leq t < \infty$ のとき以下の図のような形になる。



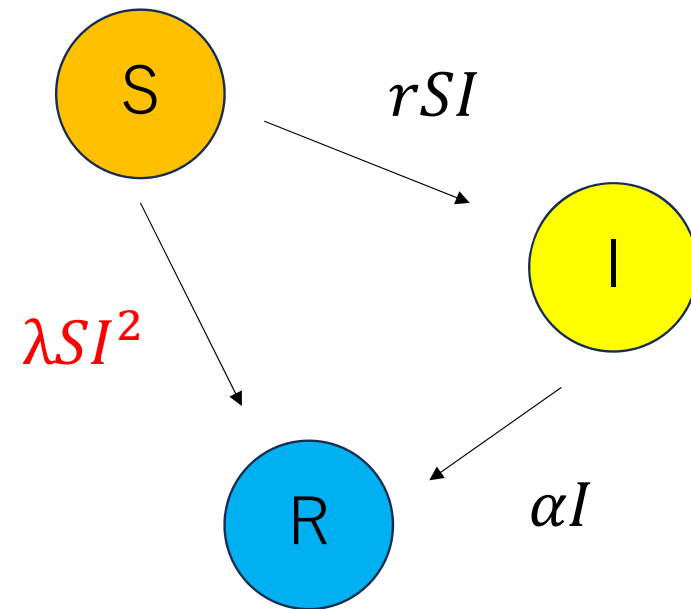
予防接種の連立微分方程式

(S)のメンバーは、(S)の総数と(I)のメンバーの2乗の積に比例する率 λ で予防接種を受けるとする。

このとき(1)は、

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI - \lambda SI^2 \\ \frac{dI}{dt} = rSI - \alpha I \\ \left(\frac{dR}{dt} = \lambda SI^2 + \alpha I \right) \end{cases}$$

(4)



(4)の軌道

(4)の軌道は、1階微分方程式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\alpha - rS)I}{(r + \lambda I)SI} = \frac{\alpha - rS}{(r + \lambda I)S}$$

の解曲線である。

この微分方程式の両辺を積分すると、

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} + \frac{\lambda}{2r} (I_0^2 - I(S)^2) \quad (5)$$

曲線(5)の振舞い

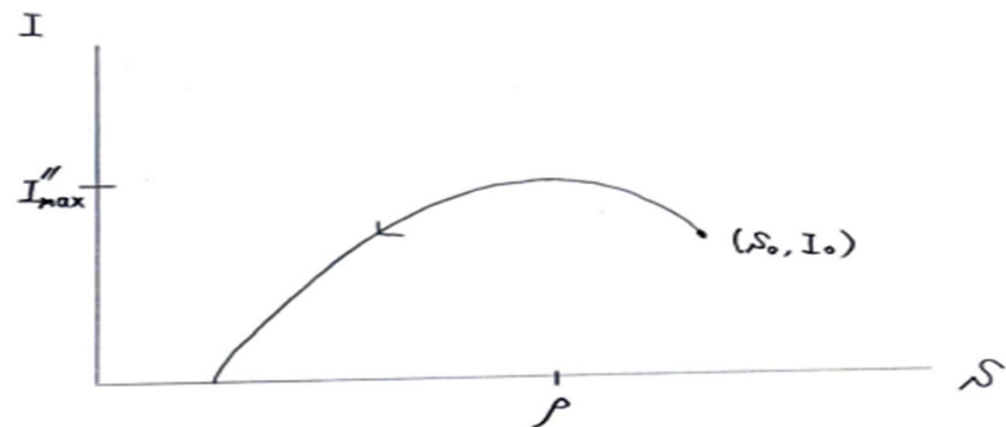
- $\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha - rS}{(r + \lambda I)S}$ より、 $I'(S)$ の値は、 $S < \rho$ のとき正、 $S > \rho$ のとき負。
したがって、 $I(S)$ は、 $S < \rho$ のとき増加し、 $S > \rho$ のとき減少する。
- $S \rightarrow 0$ のとき、 $I(S) \rightarrow -\infty$ より、
 $0 < S_\infty < S_0$ 、 $I(S_\infty) = 0$ をみたすただ1つの点 S_∞ が存在し、
 $S_\infty < S \leq S_0$ のとき、 $I(S) > 0$ となる。
- (4)より、 $I = 0$ のとき、 $\frac{dS}{dt}$ 、 $\frac{dI}{dt}$ がともに0になるため、
点 $(S_\infty, 0)$ は(5)の平衡点。

曲線(5)の振舞い

- 増減表

S	(0)	$\dots$	ρ	$\dots$	S_0
$I'(S)$		$+$	0	$-$	
$I(S)$	$-\infty$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	I_0

- (5)の軌道($0 \leq t < \infty$)



(5)の最大値

予防接種を行う場合の $I(S)$ の最大値は、 $S = \rho$ のとき、

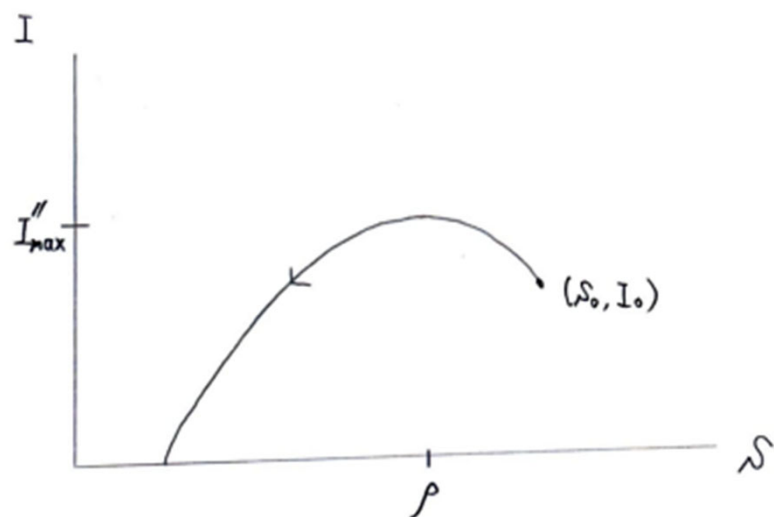
$$\begin{aligned} I''_{max} &= I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} + \frac{\lambda}{2r} (I_0^2 - I''_{max}^2) \\ &= I_{max} + \frac{\lambda}{2r} (I_0^2 - I''_{max}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

予防接種の効果

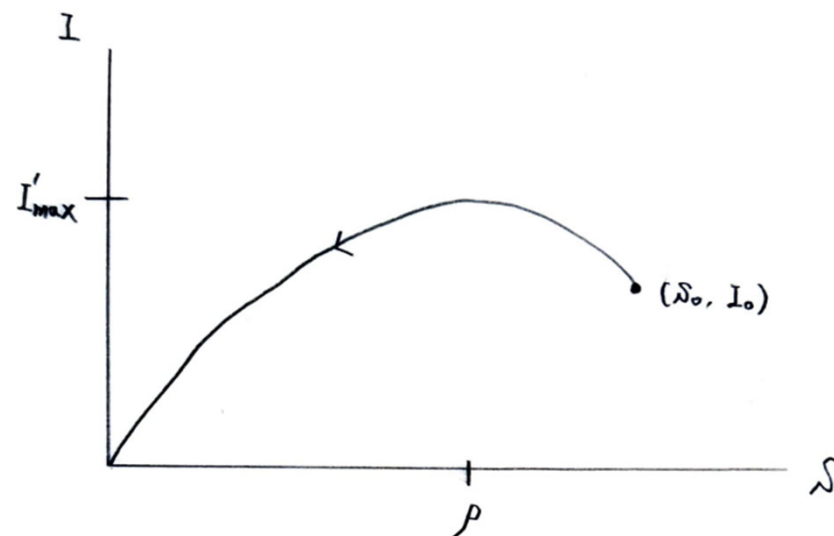
$$(3), (6)より、I_{max} > I''_{max}$$
$$(I''_{max} > I_0)$$

以上のことから、予防接種によりピーク時の感染者の人数を抑えられたため、予防接種は効果があると考えられる。

予防接種の条件による違い



予防接種 $\lambda S I^2$



予防接種 λS

具体例

- 以上の結果を具体的な数値を用いて比較していく。

集団内の人口を $N = 100$ 人とし、 $t = 0$ において10人が感染症に感染するとする。

$$(I_0 = 10, S_0 = 90)$$

具体例

- 予防接種を行わない場合

まず、感染率 $r = 0.05$ ，除外率 $\alpha = 0.5$ とすると、

$\rho = \frac{\alpha}{r} = \frac{0.5}{0.05} = 10 (> 0)$ となる。 $(S_0 = 90 > 10 = \rho$ を満たす。)

(3)より、 $\left(I_{max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0}\right)$

$$\begin{aligned} I_{max} &= 10 + 90 - 10 + 10 \log \frac{10}{90} \\ &= 90 - 21.972 = 68.028 \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

具体例

- 予防接種を行う場合(λSI^2)

まず、 $\lambda = 0.1(> 0)$ とする。

$$(6)より、\left(I''_{max} = I_{max} + \frac{\lambda}{2r}(I_0^2 - I''_{max}{}^2)\right)$$

$$I''_{max} = 68.028 + \frac{0.1}{0.1}(100 - I''_{max}{}^2)$$

$$I''_{max}{}^2 + I''_{max} - 168.028 = 0$$

$$I''_{max} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 672.112}}{2} \quad (I''_{max} > 0)$$
$$= \frac{-1 + 25.944}{2} = 12.472 \text{ となる。}$$

よって、 $I_{max} > I''_{max}$ となる。

参考文献

- 「微分方程式 下 その数学と応用」
M.ブラウン 著
一樂重雄/河原正治/河原雅子/一樂祥子 訳 (丸善出版2012)